

接触角構造付き平均曲率流の存在定理について*

東京科学大学 理学院数学系数学コース

田代紀一 (Kiichi TASHIRO)†

概要

平均曲率流とは、曲面の運動方程式ともいえる二階の準線形放物型偏微分方程式の一種で、曲面の速度が平均曲率で与えられている曲面族のことである。これは滑らかな初期値から出発しても有限時刻で特異点が生じることが知られており、そのため特異点の形状解析や正則性定理の研究のために、様々な視点から弱解の提案と研究がされてきている。本稿の目的は、平均曲率流の Brakke の意味での解の存在定理の証明を、毛細管現象からくる接触角構造を境界条件として加えた上で行うことである。特に弱解の定式化や存在性定理のための Ilmanen による elliptic regularization と呼ばれる手法について解説する。

1 導入: グラフ平均曲率流から

平均曲率流は金属の焼きなまし法の数理モデルとして考案された幾何学的流れの問題の一つであり、曲面族の法線方向速度が平均曲率で与えられるものである。例えば、 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の n 次元曲面族が、時間でパラメータ付けられた滑らかな関数 $f(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ でグラフ表示されたとしよう。このとき速度と平均曲率 H が等しいとすると、 f は偏微分方程式

$$\frac{\partial_t f}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} = H = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla_x f}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} \right) \quad (1.1)$$

の解でなければならない。この方程式の $f = 0$ での線形化は $\partial_t f = \operatorname{div} \nabla_x f = \Delta_x f$ となることから、平均曲率流は曲面に対する熱方程式のようなものであることがわかる。平均曲率流は有限時刻で消失やピンチングのような特異点が生じることが知られているが、熱方程式の平滑化効果により解の平滑化効果が期待できる¹。そのため、時間大域的に (適切な弱解の意味で) 解が存在することが予測できる。Brakke [Bra78] は幾何学的測度論の概念である varifold を用いて弱解を定式化し、存在性と正則性を扱った。本稿ではこの定式化を非斉次 Neumann 境界条件の一種である接触角構造付きに拡張し、存在性について議論する。

超関数の意味での解を定式化するために、グラフ $G(f)$ の曲面積の時間変化率を計算してみる。滑らかな境界をもつ有界開領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の高さ関数 $z = f(x, t)$ ($x \in \Omega$) が方程式 (1.1) を満たすとする。非負値テスト関数 $\phi \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ に対して、部分積分と方程式 (1.1) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{G(f)} \phi dS &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi(x, f(x, t)) \sqrt{1 + |\nabla_x f|^2} = \int_{\Omega} \phi \frac{\nabla_x f \cdot \nabla_x \partial_t f}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} + \partial_z \phi \partial_t f \sqrt{1 + |\nabla_x f|^2} \\ &= \int_{\Omega} -\phi \partial_t f \operatorname{div} \left(\frac{\nabla_x f}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} \right) + \partial_t f \frac{-(\nabla_x \phi + \partial_z \phi \nabla_x f) \cdot \nabla_x f + \partial_z \phi \partial_t f (1 + |\nabla_x f|^2)}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} \\ &\quad + \int_{\partial \Omega} \frac{\phi \partial_t f \nabla_x f \cdot \vec{\nu}_{\partial \Omega}}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} = \int_{\Omega} (-\phi H^2 + \nabla \phi \cdot (H \vec{\nu}_f)) \sqrt{1 + |\nabla_x f|^2} + (\text{境界項}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

*本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2106・JPMJSP2180 の支援を受けたものです。

†E-mail: tashiro.k.0e2f@m.isct.ac.jp

¹弱解を考えられるという意味ではこの期待は正しいが、ある意味では誤りである。実際、特異点を一点だけでもつ mean-convex な曲面を初期値とする平均曲率流で、特異点が無限回生じするような (fatteness が起こらないレベルセット解の意味での) 解の例が三浦達哉氏によって知られている ([Mi16])。

と計算できる. ここで $\vec{\nu}_f$ はグラフ $G(f)$ の単位法線ベクトル. まず初めにこの式から平均曲率流の弱解はどのように定式化すべきかを考察していく. 主な議論のポイントは, どのように界面を接触角境界条件付きの意味で弱解に適した形で一般化するか, となる. Dirichlet や Neumann 境界条件であれば境界項が 0 となるが, 接触角条件では 0 とならないためである.

2 修正可能 Radon 測度と capillary による接触角構造

曲面を一般化する考え方として, 曲面を曲面積とみなして考える varifold と呼ばれるものがある. しかし varifold は抽象的すぎる概念であるため, ここでは varifold のうち, 測度論的に C^1 とみなせるクラスである (整 n 次元) 修正可能 Radon 測度を紹介する.

Definition 2.1. 1. 集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ が (n 次元可算) 修正可能集合であるとは, $\mathcal{H}^n$ 可測かつ局所有限であり, ある高々可算個のリプシッツ写像 $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して, $\mathcal{H}^n(\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\mathbb{R}^n)) = 0$ を満たすときである. ここで $\mathcal{H}^n$ は n 次元ハウスドルフ次元である.

2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の Radon 測度 μ が (整 n 次元) 修正可能であるとは, ある修正可能集合 Γ と, Γ 上に定義される $\mathcal{H}^n$ 可測関数 $\theta : \Gamma \rightarrow [0, \infty)$ が存在して, $\theta \in L^1_{loc}(\mathcal{H}^n|_{\Gamma})$ かつ $\mathcal{H}^n$ -a.e. で $\theta(x) \in \mathbb{N}$ であり

$$\mu(\phi) = \int_{\Gamma} \phi(x) \theta(x) d\mathcal{H}^n(x) \quad (\phi \in C_c(\mathbb{R}^{n+1}))$$

と書けるときである. ここで $\mathcal{H}^n|_{\Gamma}$ は測度の制限を表し, $\mathcal{H}^n|_{\Gamma}(A) = \mathcal{H}^n(A \cap \Gamma)$ のこと.

この n 次元ハウスドルフ測度とはおおざっぱには曲面積測度のことであり, f のグラフ $G(f)$ のハウスドルフ測度は $d\mathcal{H}^n|_{G(f)} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$ となることが知られている. 関数 θ は曲面の**多重度**と呼ばれるもので, $\theta = 2$ であれば曲面が二枚重なっている状況を表している.

リプシッツ写像はほとんど至る所で C^1 であるという Rademacher の定理より, 修正可能という概念は積分記号下では C^1 多様体のように扱うことができる. 実際, 曲面の構造を考える上で必須である接平面の概念を修正可能 Radon 測度に対しても次の意味で考えることができる.

Theorem 2.2. 修正可能 Radon 測度 μ に対して, 修正可能集合 Γ と非負値可測関数 θ を $\mu = \theta \mathcal{H}^n|_{\Gamma}$ なるようにとる. このとき $\mathcal{H}^n$ -a.e. $x \in \Gamma$ に対して n 次元部分空間 $T_x \mu \subset \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \int_{(x+\Gamma)/\lambda} \phi d\mu = \theta(x) \int_{T_x \mu} \phi d\mathcal{H}^n$$

が任意の $\phi \in C_c(\mathbb{R}^{n+1})$ で成り立つ. この $T_x \mu$ を μ (あるいは Γ) の x での**概接平面**という.

概接平面は測度論的な接平面であり, 積分範囲を拡大する操作を利用することで微分を使わずに, 曲面が平面に近づいて行く状況を記述している. この定理があるため, 修正可能というクラスは微分できないような極めて一般的な曲面を扱うときに役立つクラスであることがわかる. 一方で平均曲率は二回微分しないと得られない量であるため², 修正可能であるだけではこれは存在しえないことが想像できる. ではどのように考えるかというと, 「曲面積の第一変分は平均曲率で表される」ということを用いる. 具体例として, 任意のテスト関数 $\phi \in C_c^1(\Omega)$ をとり, グラフ $z = f(x)$ を z 方向にのみ第一変分を取った $z = f(x) + \delta \phi(x)$ について, 表面積の $\delta = 0$ での微分を計算してみる. これは部分積分により

$$\frac{d}{d\delta} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla_x f + \delta \nabla_x \phi|^2} \Big|_{\delta=0} = \int_{\Omega} \frac{\nabla_x f \cdot \nabla_x \phi}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} = - \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla_x f}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} \right)$$

²弱い意味の曲面に対してもこれは正しく, 平均曲率を持つ修整可能集合は a.e. で C^2 部分多様体で表現できることが U. Menne 氏によって知られている ([Men13]). 実際にはもう少し弱い仮定で証明されている.

となる．すこし無理矢理であるが、 $X = (0, \dots, 0, \phi)$ というベクトル場を考えることで

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_{T_x G(f)} X \sqrt{1 + |\nabla_x f|^2} = - \int_{\Omega} X \cdot (H \vec{\nu}_f) \sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}$$

という等式を得ることができ、実際にこの等式は一般のテストベクトル場について成り立つ．ここで $\operatorname{div}_{T_x G(f)}$ は発散を $T_x G(f)$ への射影したもので、射影行列 $P_{T_x G(f)}$ とヘシアン ∇X を用いて $\operatorname{tr}(P_{T_x G(f)}(\nabla X))$ と書ける．左辺において二回微分を行っていないことに着目すると、弱い意味での平均曲率は第一変分から次のように定義することができる．

Definition 2.3. 整 n 次元修正可能 Radon 測度 μ に対し、 μ について可積分なベクトル場 $\vec{H}_\mu : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が存在し、任意の $X \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^{n+1})$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \operatorname{div}_{T_x \mu} X d\mu = - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} X \cdot \vec{H}_\mu d\mu$$

が成り立つならば、 $\vec{H}_\mu$ を μ の一般化された平均曲率ベクトルという．

上記の弱い意味での平均曲率の定義は部分積分に大きく依存している．部分積分を行うと境界項が出てくることから、境界条件を考えたいときには上記の定義は不十分である．そこで $-1 < a < 1$ に対して、次の capillary を考慮した面積汎関数である Gauss' free energy を考える：

$$G_a(S) := \mathcal{H}^n(S \cap \Omega) + a \mathcal{H}^n(S \cap \partial\Omega) \quad (S : \text{境界が } \Omega \text{ 上滑らかな } n \text{ 次元曲面となる領域}). \quad (2.1)$$

これは S が机の上の水滴のような状況と思ったときに、エネルギーとして表面積を採用した汎関数である．水滴 S は机 $\partial\Omega$ に染み込むため、 S の表面張力は Ω と $\partial\Omega$ で異なる．この張力の変化を wettability と呼ばれる定数 a で表現している．汎関数 G_a の体積保存条件下での最小化領域は、下図のような張力のつり合いによる (Young の) 接触角構造を持つ．

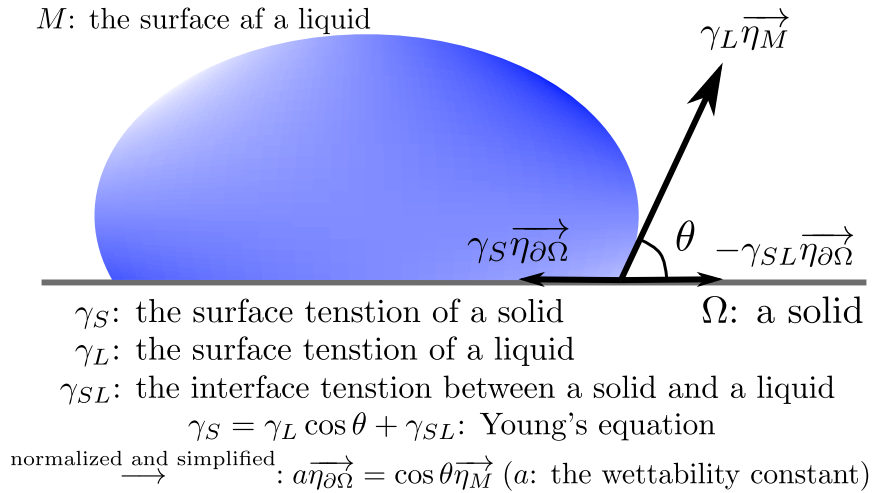


図 1: Young's law の図

曲率と capillary の関係を見るために、テストベクトル場 X に対して G_a の第一変分を考える．境界を $M = \partial S$ とおき、境界での張力のつり合いを見るために $X \cdot \nu_{\partial\Omega} = 0$ と仮定する．このとき領域の境界 $\partial\Omega$ の平均曲率と X が直行することから

$$\begin{aligned} (G_a \text{ の } X \text{ についての第一変分}) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_{T_x M} X d\mathcal{H}^n \llcorner_M + a \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}_{T_x M} X d\mathcal{H}^n \llcorner_M \\ &= - \int_{\Omega} X \cdot \vec{H}_M d\mathcal{H}^n \llcorner_M + \int_{\gamma(M)} (\vec{\eta}_{M \cap \Omega} + a \vec{\eta}_{M \cap \partial\Omega}) \cdot X d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

と計算できる. ここで $\gamma(M)$ は $M \cap \Omega$ の曲面の意味での境界であり, $\vec{\eta}$ は曲面の単位 co-normal ベクトルを表している. 上図のつり合いの関係から, $\vec{\eta}_{M \cap \Omega} + a\vec{\eta}_{M \cap \partial\Omega} \perp \partial\Omega$, すなわち $X \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} = 0$ なるテストベクトル場に対して上式の境界項が 0 となることから, 接触角条件を表していることを読み取れる. 上記の議論は, 曲面測度 μ に対し補助的な境界測度 ν を導入することで, つり合いによる接触角構造を定義できることを示唆している. このモチベーションを元に, Kagaya–Tonegawa [KT17] は次のような接触角構造を, 一般化された曲面に対して定義した.

Definition 2.4. 定数 $\theta \in (0, \pi)$ を固定し, $a = \cos \theta$ とする. 滑らかな境界をもつ閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内に台を持つ整 n 次元修正可能 Radon 測度 μ と $\partial\Omega$ に台を持つ整 n 次元修正可能 Radon 測度 ν に対し, ある μ について可測なベクトル場 $\vec{H}_\mu: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が存在し, 任意の $X \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^{n+1})$ で $X \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} = 0$ を満たすものに対し

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_{T_x \mu} X \, d\mu + a \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}_{T_x \nu} X \, d\nu = - \int_{\Omega} X \cdot \vec{H}_\mu \, d\mu, \quad \vec{H}_\mu \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{a.e. } x \in \partial\Omega) \quad (2.2)$$

が成り立つならば, $\vec{H}_\mu$ を μ の一般化された接触角付き平均曲率ベクトルという. このような H_μ があるとき, 組 (μ, ν) は接触角 θ を持つという. 領域 Ω は, 内部にある曲面測度 μ が境界に張り付く可能性を考慮して閉領域としてある.

3 接触角付き Brakke flow

前章で曲面を測度論的に C^1 曲面として扱えるような一般化を行い, 一般化された平均曲率を接触角付きで定義した. 次に超関数の意味での平均曲率流を式 (1.2) を元に考察していく. この式は一般の (滑らかな) 時間発展する多様体に対して成り立つ. 速度ベクトルを $\vec{V}$, 平均曲率ベクトルを $\vec{H}$ として多様体の族 M_t に対して境界項を無視して式 (1.2) を考えると

$$\frac{d}{dt} \int_{M_t} \phi \, d\mathcal{H}^n = \int_{M_t} (-\phi \vec{H} + \nabla \phi) \cdot \vec{V} \, d\mathcal{H}^n \quad (\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1}; [0, \infty))) \quad (3.1)$$

となる. 式 (1.2) における境界項は, 今回の設定では平均曲率の定義によって処理しているため, 0 であるとしてよい. 素直に考えれば, 式 (3.1) における $\vec{V}$ を $\vec{H}$ に取り換えることで弱解の定式化ができるのではと思える. 弱解とはいえ平均曲率を時間積分しているため, すべてでなくてもほとんどすべての時刻で接触角構造とそれによる平均曲率が必要であろう. 式 (3.1) からアприオリ評価として曲率の局所時空間 L^2 積分が有界であることが得られるため, これも解の定義に必要となる. また曲面同士が段々近づき重なってしまうことも想定されるため, 多重度を考えられるクラスで解を定義することが (後付けだが) 自然である. 以上を踏まえて, 次のように (接触角付きの) 平均曲率流の弱解の一つである Brakke flow を定義する³.

Definition 3.1. 定数 $\theta \in (0, \pi)$ を固定し, $a = \cos \theta$ とし, さらに滑らかな境界をもつ閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を固定する. 領域 Ω 内に台を持つ整 n 次元修正可能 Radon 測度 μ_t と $\partial\Omega$ 内に台を持つ整 n 次元修正可能 Radon 測度 ν_t の組 $\{(\mu_t, \nu_t)\}_{t \geq 0}$ が n 次元接触角付き Brakke flow であるとは, 以下がすべて満たされるときである.

1. a.e. $t > 0$ に対し, (μ_t, ν_t) は接触角 θ を持つ (一般化された平均曲率を $\vec{H}_{\mu_t}$ と書く).
2. 任意の $0 < T < \infty$ と任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し, $\int_0^T \int_K |\vec{H}_{\mu_t}|^2 \, d\mu_t \, dt < \infty$.
3. 任意の $0 \leq t_1 < t_2$ と任意の $\phi \in C_c^1(\Omega \times [0, \infty); [0, \infty))$ に対し,

$$\left| \int_{\Omega} \phi \, d(\mu_t + a\nu_t) \right|_{t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (-\phi \vec{H}_{\mu_t} + \nabla_x \phi) \cdot \vec{H}_{\mu_t} \, d\mu_t \, dt + \partial_t \phi \, d(\mu_t + a\nu_t) \, dt. \quad (3.2)$$

³形は元々の Brakke [Bra78] の定義と異なるが, 本質的には同じである. Brakke は多重度が自然数であることを要請しておらず, 曲率を曲面の法方向に射影するといった必要が出てくる.

この定義は式 (3.1) を動機にしているといっても多くの謎があるように見えるだろう。まず、なぜ式 (3.1) のように等式で定義していないかについて説明する。極めて一般的な枠組みでは、曲面の一部が一瞬にして消滅する状況を許容しなければ存在定理の証明が困難になるということが一つの理由である。具体的には、曲率の L^2 積分項を近似するとき、一般にはこの項に対しては下半連続性しか保証できないことが等式を証明できない技術的な困難となる。現象的にも、不安定なシャボン玉が一瞬にして消えるように曲面の消失が起こりえるため、等式で定義すると弱解として不適である。また滑らかな場合であれば、式 (3.1) と (3.2) から次の特徴付けを得ることができるため、不等式で平均曲率流を定義してしまっても、その正当性を証明できる。

Proposition 3.2. 滑らかな多様体の族 $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ が平均曲率流であることと、任意の $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty); [0, \infty))$ と任意の $0 \leq t_1 < t_2 < T$ に対して、

$$\int_{M_t} \phi d\mathcal{H}^n \Big|_{t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} (-\phi \vec{H}_{M_t} + \nabla_x \phi) \cdot \vec{H}_{M_t} + \partial_t \phi d\mathcal{H}^n dt$$

が成り立つことは同値である。ここで $\vec{H}_{M_t}$ は M_t の平均曲率ベクトル。

なぜ式 (3.2) に補助的に導入した境界測度を入れているかについて説明する。滑らかな場合であれば ν_t に関する項が右辺と左辺で打ち消しあうため、 ν_t が時間について滑らかでないときを考える。仮に式 (3.2) に境界項がなかったとすると、 ν_t に関しては接触角構造以外に連続性すら保証されていないことから、例えば初期値においては ν_t は $\partial\Omega$ の一部分のみにしかなかったとしても、ある時刻で $\nu_t = \mathcal{H}^n|_{\partial\Omega}$ のように補助的な境界測度が急激に境界全体に広がるという現象を防ぐことができない。このとき式 (2.2) の ν の項が自動的に 0 になるが、これは $a = 0$ 、すなわち接触角 90° な状況と一致してしまい、Neumann 境界条件のような振る舞いになってしまう。この現象を防ぐために境界項に何らかの意味での連続性が必要であり、その連続性の保証のために境界項を定義に組み込んでいる。

とはいえ不等式で定義することには明確なデメリットがあり、定義からの一意性の保証が何もうなくなってしまう。それどころか、初期値が空集合でなくても一瞬で曲面全体がなくなってしまう非物理的な現象をもこの定義は許容してしまっている。境界測度 ν_t のみが突然消失することも起こりうるだろう。このような現象を防ぐためには上の定義に加えて筋のいい解の連続性などの性質を構成法から示すことが必要である。構成法からどの程度まで一意性に迫っていけるかという問題は平均曲率流に対する大きな研究テーマの一つである。

4 先行研究と主定理

時間発展しない接触角を考慮した問題は、Gauss' free energy (2.1) に関する膨大な研究がある。一方で、時間発展する平均曲率流についての研究は時間発展しないものと比べるとほとんど研究されていない。ここでいくつか先行研究を紹介する。粘性解理論を用いたレベルセットの意味での平均曲率流については、Ishii–Sato [IS04] により、(より一般の形の方程式に対する) 粘性解理論が整備されている。Minimizing movement 法と呼ばれる、変分的近似スキームによる minimizer を用いた時間離散的近似法による研究は比較的盛んでありすべての文献を挙げることは難しい。ここでは近年に証明された、minimizing movement 法の近似の収束先が領域が凸であれば、レベルセット解に収束するという Eto–Giga [EG24] による結果のみを挙げておくに留める。平均曲率流の存在性の研究は、二重井戸型ポテンシャルを持つ反応拡散型方程式である Allen–Cahn 方程式を用いたものも有名である。接触角構造に対応する非斉次 Neumann 境界条件を課した Allen–Cahn 方程式を用いた研究については、[HL24] や [MTTW24] 等がある。[HL24] では BV flow と呼ばれる別の定式化による平均曲率流の弱解について議論している。BV flow は、曲面が囲む領域の面積変化に着目した定式化であり、表面積変化に着目している Brakke

flow とは異なる解概念である. [MTTW24] では接触角付き Allen–Cahn 方程式のエネルギーについて, 特異極限の振る舞いを議論している. しかしながら, 両者ともに特異極限の収束に関して自然だが証明されていない非自明な仮定を付けたものになっている.

これらの先行研究に対し, Brakke の意味の平均曲率流の弱解を可能な限り前提条件を排除した形での証明を, Ilmanen [I94] による変分法で取った曲面を使って平均曲率流を近似する elliptic regularization と呼ばれる手法を応用することで得ることができた. 前置きが非常に長くなってしまったが, 次が主定理となる.

Theorem 4.1 ([Ta24], Theorem 2.7). 定数 $\theta \in (0, \pi/2)$ を固定し⁴, $a = \cos \theta$ とし, さらに滑らかな境界をもつ閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を固定する. 開集合 $E_0 \subset \Omega$ を境界が C^1 となりかつ $\mathcal{H}^n(\partial E_0) < \infty$ と取る⁵. このとき定義 3.1 の意味の接触角付き Brakke flow $\{(\mu_t, \nu_t)\}_{t \geq 0}$ で

$$\mu_0 + a\nu_0 = \lim_{t \rightarrow +0} (\mu_t + a\nu_t) = \mathcal{H}^n|_{\Omega^\circ \cap \partial E_0} + a\mathcal{H}^n|_{\partial \Omega \cap \partial E_0}$$

を満たすものが存在する. ここで Ω° は Ω のユークリッド位相についての内部.

5 証明の概略: elliptic regularization について

接触角構造を考え始める上での最初の困難は, 非斉次な境界項を無視できないことによる評価の難しさである. このことは, 式 (1.2) 中の境界項が, Dirichlet や Neumann 境界条件であれば 0 となるが接触角境界条件では消えないという部分にも現れている. 一方で Gauss' free energy と関連する変分法による解析手法の発達は, 変分構造と接触角構造は相性がいいことを示唆している. [Ta24] のアイデアは, 変分法で考えた曲面を用いて平均曲率流を構成する elliptic regularization を, 変分構造を利用して接触角構造付きにうまく拡張していくことである. ここから capillary 付き elliptic regularization の流れについて解説する.

1. 初期値として $E_0 \subset \Omega$ をとり, 次の汎関数を考える:

$$I_a^\varepsilon(S) := \int_{\partial^* S \cap \Omega^\circ} + a \int_{\partial^* S \cap \partial \Omega} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{z}{\varepsilon}\right) d\mathcal{H}^{n+1}. \quad (5.1)$$

ここで, $S \subset \mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty)$ は $E_0 = \{x \mid (x, 0) \in S\}$ となるような有界周長集合 (あるいは set of finite perimeter と呼ばれる) とし, $\partial^* S$ を reduced boundary とする. Reduced boundary とは「測度論的境界」とでもいうべきもので, 有界周長集合から「スジの良い」点のみを集め, 境界が a.e. で C^1 曲面となるようにしたものである. 例として $[0, 1]^2 \cup \mathbb{Q}$ について考えてみる. この集合に対し位相的な境界を取ってしまうと $\partial([0, 1]^2 \cup \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$ と全体空間になってしまうが, 測度 0 の集合を都合よく取り除くことで $\partial^*([0, 1]^2 \cup \mathbb{Q}) = \partial[0, 1]^2$ のように幾何学的に意味のある部分のみを考えることができる. これが reduced boundary の考え方である. 汎関数 (5.1) の minimizer S^ε をとり⁶, テストベクトル場 X に $X \cdot \vec{\nu}_{\Omega \times (0, \infty)} = 0$ を仮定して汎関数 (5.1) の第一変分を計算すると, $\vec{e}_z = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$ として

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\circ \times (0, \infty)} + a \int_{\partial \Omega \times (0, \infty)} \operatorname{div}_{T_{(x, z)}} X d\mathcal{H}^{n+1}|_{\partial^* S^\varepsilon} \\ &= \int_{\Omega^\circ \times (0, \infty)} \frac{1}{\varepsilon} P_{T_{(x, z)}^\perp}(\partial^* S^\varepsilon)(\vec{e}_z) \cdot X d\mathcal{H}^{n+1}|_{\partial^* S^\varepsilon} \end{aligned}$$

⁴技術的な理由により, $a > 0$ となるように角度に制限を加えている. この場合でも, 曲面が囲む領域の「反対側」を見ることにより, 本質的には $a < 0$ の状況を表している.

⁵もっと弱いクラスを初期値として取れる. 曲面積変化の連続性や曲面が囲む領域の体積変化の連続性などの性質も証明できる. この性質により, 前章で説明した Brakke flow 特有の曲面が突然消失する現象を防げる.

⁶Set of finite perimeter を考える理由の一つは, C^1 曲面と違いコンパクト性と下半連続性があるためである. これらにより, 変分法における直接法で表面積汎関数の minimizer を取ることができる.

が得られる。Minimizer S^ε に対し、 $\mu^\varepsilon = \mathcal{H}^{n+1}|_{\Omega^\circ \times (0, \infty) \cap \partial^* S^\varepsilon}$ と $\nu^\varepsilon = \mathcal{H}^{n+1}|_{\partial \Omega \times (0, \infty) \cap \partial^* S^\varepsilon}$ とおくと、組 $(\mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ は上記の計算により接触角構造を持つことがわかる。よって Euler–Lagrange 方程式として、 $\partial^* S^\varepsilon$ の接触角付き平均曲率ベクトルを $\vec{H}^\varepsilon$ とおくと

$$\vec{H}^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} P_{T_{(x,z)}^\perp}(\partial^* S^\varepsilon)(\vec{e}_z)$$

が得られる。時間 $t \geq 0$ をとり、 $\partial^* S^\varepsilon - t\vec{e}_z/\varepsilon$ のように t でパラメータ付けた z 方向平行移動を考えると、得られた式の右辺はまさに平行移動の速度ベクトルを表していることがわかる。すなわち、曲面族 $\partial^* S_t^\varepsilon = \partial^* S^\varepsilon - t\vec{e}_z/\varepsilon$ は平均曲率流になっている。上記で定めた $(\mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ に対し、この平行移動を施したものを $(\mu_t^\varepsilon, \nu_t^\varepsilon)$ とおく。平行移動した測度の組 $(\mu_t^\varepsilon, \nu_t^\varepsilon)$ について、時間微分を計算することでこの組が接触角付き Brakke flow になっていることを確認できる。

2. 汎関数 (5.1) の重み関数 $\exp(-z/\varepsilon)$ は、 z 方向に伸びれば伸びるほど小さい重みになっていくことを表している。すなわち $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、 z 方向の重みも指数的に小さくなり、その結果 $\partial^* S^\varepsilon$ は z 方向に伸びたシリンダー状の図形 $\partial^* E \times (0, \infty)$ に近づいていく。
3. 平行移動 $\partial^* S_t^\varepsilon$ は平均曲率流であった。ここでもし接触角付き Brakke flow にコンパクト性があつたとすれば、 ε について部分列をとることで $\partial^* S_t^\varepsilon$ はある Brakke flow が存在して $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で収束することがいえる。平行移動する前の $\partial^* S^\varepsilon$ はシリンダーに収束していくため、 $\partial^* S_t^\varepsilon$ もまたシリンダー $\partial^* E_t \times \mathbb{R}$ に収束する。コンパクト性により収束先は Brakke flow であったので $\partial^* E_t \times \mathbb{R}$ も Brakke flow である。スライスをとることで、 $\partial^* E_t$ も Brakke flow であることがわかり、これが求めたかったものである。

上記の議論において、正当化が最も困難な部分はコンパクト性の証明である。Sobolev 関数とのアナロジーでこの点を説明しよう。Galerkin 法を例に挙げると、近似法から導かれるエネルギー評価を行うことで近似列に対して

$$\int_0^T \int_\Omega |u^\varepsilon|^2 + |\nabla u^\varepsilon|^2 < \infty, \quad \int_0^T \|\partial_t u^\varepsilon\|_{H^{-1}}^2 < \infty$$

といった評価を導出し、Sobolev 関数のコンパクト性を用いて近似列の収束先をとっていた。Brakke flow についても詳細は大幅に異なるものの、第一変分はおおよそ面積測度に対する「微分」だと思えば、

$$\mu_t^\varepsilon(\phi) \leq C\|\phi\|_\infty, \quad \left| \int_\Omega \operatorname{div}_{T_x \mu_t^\varepsilon} X d\mu_t^\varepsilon \right| \leq C\|X\|_\infty, \quad (\text{Brakke flow の不等式})$$

がそれぞれ Sobolev 関数の枠組みと対応する評価といえる。実は上式第二項の第一変分の評価は、 μ_t^ε が曲率をもつことと Brakke flow はアприオリに曲率の L^2 ノルムが有界になることから自動的に導かれ、このことを利用して Brakke [Bra78] は (通常の) Brakke flow のコンパクト性を証明した⁷。「微分」である第一変分の評価を行うとき、接触角平均曲率ベクトルを表現している第一変分は、 $\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon$ に対して定義されているため、

$$\left| \int_\Omega \operatorname{div}_{T_x(\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon)} X d(\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon) \right| \leq C\|X\|_\infty$$

という、 μ_t^ε と ν_t^ε を足したものである $\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon$ に対してしか評価が得られないことが問題となる。しかしながら、曲率を積分しているのは曲面測度 μ_t^ε のみであるため、コンパクト性を μ_t^ε に

⁷明示的に主張が書かれているわけではなく、構成法の証明のなかでコンパクト性にあたるものを証明している。明示的なものは [194] に書かれている。

適用できなければ不都合が生じる．すなわち $\|\nabla(u^\varepsilon + v^\varepsilon)\|_2$ の評価から $\|\nabla u^\varepsilon\|_2$ の評価を導く必要がある．一般には $f + g \in W^{1,2}$ であっても $f \in W^{1,2}$ かつ $g \in W^{1,2}$ すら成立しないため，ここには何か工夫が必要になることは想像に難くない．

この問題に対して，今回の構成では minimizer を用いているという事実をうまく使うことができる．具体的には De Philippis–Maggi [DM15] によって証明された minimizer に対する正則性定理を援用することで， S^ε に対して次の事実を課してもよいことがわかる（本稿のために，主張は非常にラフに書いている）．

Theorem 5.1. *Minimizer $\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0, \infty)$ は境界まで込めて $C^{1,1/2}$ 曲面である．さらに， $\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0, \infty)$ の曲面の意味での境界 $\gamma(\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0, \infty))$ は領域の境界 $\partial\Omega$ と $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. $(x, z) \in \gamma(\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0, \infty))$ で角度 θ で接している．*

上記のような正則性定理があったとしても，第一変分の評価を直接的に得ることはできない．なぜなら，今回用いている汎関数 (5.1) は $\exp(-z/\varepsilon)$ という重みを付けているため，第一変分の評価をする際，常に $1/\varepsilon$ がかかってしまい ε に対して一様な評価が出ないからである．

完全に μ_t^ε と ν_t^ε を Sobolev 関数と同一視してアイデアのみを解説する．一つ目のアイデアは， $\|\nabla(\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon)\|$ の評価は平均曲率ベクトル H^ε を絡めた形で得られるため，Brakke flow のアプリオリ評価を利用できることである．曲率の評価そのものは重み関数の存在から ε に依存してしまうが，minimizer というだけでなく Brakke flow である事実を利用することで ε に依存しない評価に置き換えることができる．このことにより， $\|\nabla(\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon)\|$ の評価を μ_t^ε と ν_t^ε それぞれに分解することさえ出来れば評価が完成しそうである．二つ目のアイデアは， μ_t^ε と ν_t^ε が「交わる」部分は境界上のみであることから， μ_t^ε が接触角の構造を通常の意味で持つ事実を利用できるだろうということである．接触角構造から，境界上であれば

$$\nu_{\partial\Omega \times (0, \infty)} \cdot \nabla \mu_t^\varepsilon = \sin \theta$$

が成立する．境界に対して接戦方向ではなく法方向に変分を取っているため， $\cos$ と $\sin$ の関係から上式に現れるのは $\sin$ である．一方，補助的な境界測度 ν_t^ε は完全に境界に張り付いているため

$$\nu_{\partial\Omega \times (0, \infty)} \cdot \nabla \nu_t^\varepsilon = 0$$

が成立する．よって，境界上の勾配を境界の法方向成分のみに射影したものを $\nabla^\perp$ と書くと，

$$\nabla^\perp(\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon) = \sin \theta \nabla \mu_t^\varepsilon$$

が得られ， $\sin \theta \neq 0$ に注意すれば μ_t^ε 単体の評価を $\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon$ の評価により得ることができる．以上の議論は全く形式的なものであるが，実は修正可能 Radon 測度に対して正当化することができ，これによりコンパクト性のための第一変分の評価を得ることができる．

6 今後の展望

[Ta24] で接触角付き Brakke flow の存在定理を得ることができたわけであるが，その性質についてはほとんどなにも言っていない．例えば，avoidance principle, Huisken’s monotonicity formula, 消滅時刻の下界評価など，通常平均曲率流で知られていることが何も知られていない．上記の性質たちや，Brakke の正則性定理を接触角条件下で行うことは（曲線の場合であっても）非自明であり，接触角構造をより深く理解する上で重要な問題となるだろう．

接触角付きに限らない Brakke flow の研究全般として，解析学的手法からどのようなことがわかるか，という疑問が多く残されていることが挙げられる．平均曲率流は微分幾何学の手法をベースにした研究は膨大な量にのぼる．一方で，Allen–Cahn 方程式やレベルセット解など解析

学からのアプローチはよく知られているにも関わらず、微分幾何学的研究と比べるとかなり少なく、Allen–Cahn 方程式の性質を平均曲率流の性質を逆輸入することで証明できるか? など未知なる鉱脈がまだ眠っているのではないかと考えている。近年の研究がまとめられたサーベイとして [Stu23], Brakke flow の入門書として [Ton19] がある。もし興味を持っていただいた読者がいたら、ぜひ読んでいただきたい。

参考文献

- [Bra78] K. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Math. Notes 20, Princeton University, Princeton, 1978.
- [DM15] G. De Philippis and F. Maggi, *Regularity of Free Boundaries in Anisotropic Capillarity Problems and the Validity of Young’s Law*, Arch. Ration. Mech. Anal., 216(2):473–568, (2015).
- [EG24] T. Eto and Y. Giga, *A Convergence Result for a Minimizing Movement Scheme for Mean Curvature Flow with Prescribed Contact Angle in a Curved Domain*, arXiv preprint, arXiv:2402.16180, (2024).
- [HL24] S. Hensel and T. Laux, *BV Solutions for Mean Curvature Flow with Constant Contact Angle: Allen–Cahn Approximation and Weak-Strong Uniqueness*, Indiana Univ. Math. J., 73(1):111–148, (2024).
- [I94] T. Ilmanen, *Elliptic Regularization and Partial Regularity for Motion by Mean Curvature*, Mem. Am. Math. Soc., 108(520), 90pp, (1994).
- [IS04] H. Ishii and M-H. Sato, *Nonlinear Oblique Derivative Problems for Singular Degenerate Parabolic Equations on a General Domain*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 57(7-8):1077–1098, (2004).
- [MTTW24] K. Marshall-Stevens, M. Takada, Y. Tonegawa and M. Workman, *Gradient Flow of Phase Transitions with Fixed Contact Angle*, arXiv preprint, arXiv:2411.17979, (2024).
- [Men13] U. Menne, *Second Order Rectifiability of Integral Varifolds of Locally Bounded First Variation*, J. Geom. Anal., 23(2):709–763, (2013).
- [Mi16] T. Miura, *An Example of a Mean-Convex Mean Curvature Flow Developing Infinitely Many Singular Epochs*, J. Geom. Anal., 26(4):3019–3026, (2016).
- [KT17] T. Kagaya and Y. Tonegawa, *A Fixed Contact Angle Condition for Varifolds*, Hiroshima Math. J., 47(2):139–153, (2017).
- [Stu23] S. Stuvard, *New Advances on the Existence and Regularity of Brakke’s Mean Curvature Flow*, arXiv preprint, arXiv:2311.05370, 2023.
- [Ta24] K. Tashiro, *Existence of Weak Mean Curvature Flow with Prescribed Contact Angle via Elliptic Regularization*, arXiv preprint, arXiv:2410.12283, (2024).
- [Ton19] Y. Tonegawa, *Brakke’s Mean Curvature Flow: An Introduction*, Springer Singapore, 2019.